MECCANICA

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

VETTORI

- ci sono alcune grandezze come velocità, accelerazione, forza che sono dette grandezze vettoriali e sono descritte da VETTORI.

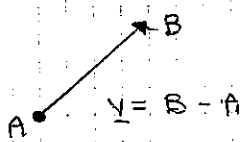


Per descrivere un vettore, c'è bisogno di specificare:
- MODULO (magnitudo)
- DIREZIONE
- VERSO

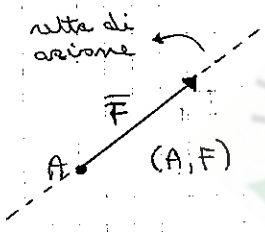
} (direction)

oss: lo scalare che indica il modulo del vettore si indica con $|\underline{V}|$

Si possono distinguere tre tipi di vettori:
- quelli definiti da due punti (segmenti orientati);
- quelli che agiscono in un particolare punto (vettori applicati);
- quelli che non hanno un punto di applicazione (vettori liberi).

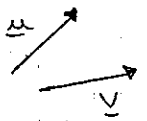


dati due punti A e B si chiama SEGMENTO ORIENTATO $\overline{AB}$ il vettore avente origine in A ed estremo in B, quindi direzione della retta per A e per B, verso da A a B e modulo pari alla lunghezza del segmento $\overline{AB}$.

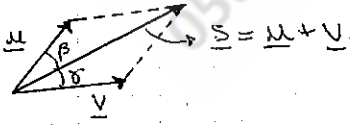


alcuni vettori hanno una posizione ben precisa nello spazio definita dal loro punto di applicazione (application point). È importante anche la retta su cui giace il vettore detta retta di applicazione o di azione del vettore.

OPERAZIONI con i VETTORI

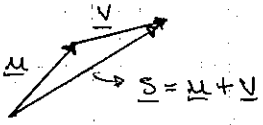


⇒



metodo del parallelogramma

oppure



metodo punta-coda

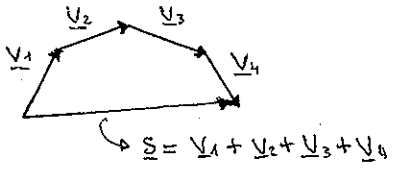
con il teorema di Carnot e il teorema dei seni, si determinano il modulo del vettore somma $|\underline{S}|$ e gli angoli β e γ che esso forma con i vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$:

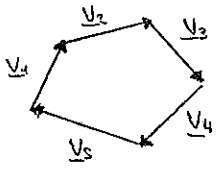
$$|\underline{S}| = \sqrt{u^2 + v^2 - 2|u||v|\cos\alpha}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{|S|}\cdot|v| \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\gamma = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{|S|}\cdot|u|$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Se si vuole fare la somma di più vettori basta usare il metodo punta-coda e, infine, unire la coda del primo con la punta dell'ultimo.





$$\sum_{i=1}^{5} \underline{v}_i = \underline{0}$$

oss: la somma vettoriale gode della proprietà commutativa.

La differenza tra due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ è come la somma di uno con l'opposto dell'altro.

$$\underline{d} = \underline{u} - \underline{v} \Rightarrow \underline{d} = \underline{u} + (-\underline{v})$$

$-\underline{v}$: vettore opposto a $\underline{v}$, cioè stesso modulo, stessa direzione, ma verso opposto.

PRODOTTO di uno SCALARE con un VETTORE

$\underline{V} = c\,\underline{u}$ ⇒ ha come risultato un vettore $\underline{V}$ parallelo al primo e concorde con esso se $c > 0$, discorde in caso contrario.

Questa operazione è utilizzata frequentemente con vettori di modulo unitario, denominati versori (unit vectors)

$\underline{V} = \underline{V} \cdot \lambda$ dove $|\lambda| = 1$

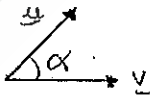
dato un vettore V, il versore ad esso associato si indica come: $\text{vers}\, V = \dfrac{\underline{V}}{|V|}$

PRODOTTO SCALARE

ha come risultato uno scalare che può essere positivo, negativo o nullo.

$$\underline{u} \cdot \underline{V} = \alpha \in \mathbb{R}$$
$$= |\underline{u}| \cdot |\underline{V}| \cdot \cos\alpha$$

(α: angolo compreso)

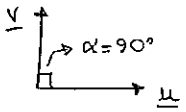


il prodotto scalare è commutativo, cioè:

$\underline{u} \cdot \underline{V} = \underline{V} \cdot \underline{u}$

il prodotto scalare è nullo se:

- $\underline{u}$ o $\underline{V}$ sono nulli;
- $\underline{u}$ e $\underline{V}$ sono ortogonali ($\perp$) tra loro, cioè $\alpha = 90°$



l'angolo α tra i due vettori è dato da:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\underline{u} \cdot \underline{V}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}\right)$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

PRODOTTO VETTORIALE

ha come risultato un vettore:

$\underline{w} = \underline{u} \times \underline{v}$ oppure $\underline{w} = \underline{u} \wedge \underline{v}$

è caratterizzato da:

- modulo: $|\underline{w}| = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\alpha$ → l'angolo minore dell'angolo piatto compreso tra $\underline{u}$ e $\underline{v}$
- direzione: $\perp$ al piano tra $\underline{u}$ e $\underline{v}$
- verso: regola della mano dx

il prodotto vettoriale è anticommutativo, cioè:

$\underline{u} \times \underline{v} = -(\underline{v} \times \underline{u})$

il prodotto vettoriale si annulla se i vettori sono paralleli tra loro, cioè $\alpha = 0°$

ALTRI PRODOTTI

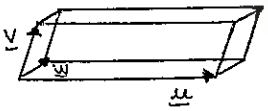
- PRODOTTO MISTO o TRIPLO

operazione tra tre vettori in cui si moltiplica scalarmente il risultato di un prodotto vettoriale ottenendo quindi uno scalare:

$(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = a \in \mathbb{R}$

il prodotto misto si annulla se i vettori sono complanari, ovvero se giacciono sullo stesso piano.

In generale rappresenta il volume del parallelepipedo avente i vettori come lati:



dalla proprietà di circolarità si ha, inoltre, che:

$$(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w} = \begin{cases} \underline{w} \cdot (\underline{u} \times \underline{v}) \\ (\underline{w} \times \underline{u}) \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot (\underline{w} \times \underline{u}) \\ (\underline{v} \times \underline{w}) \cdot \underline{u} = \underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) \end{cases}$$

- DOPPIO PRODOTTO VETTORIALE

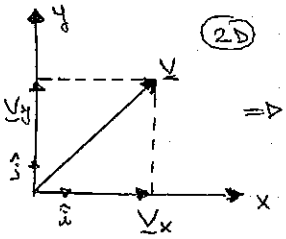
$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}(\underline{a} \cdot \underline{b})$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

COMPONENTI di un VETTORE

dato un sistema di riferimento cartesiano $\{O, x, y, z\}$, si indicano con i, j, k i versori degli assi x, y, z rispettivamente. Si utilizzano sistemi di riferimento levogiri, in cui è verificato il prodotto vettoriale $i \times j = k$

Quindi, dato un vettore, è possibile decomporlo in componenti parallele agli assi.



(2D)

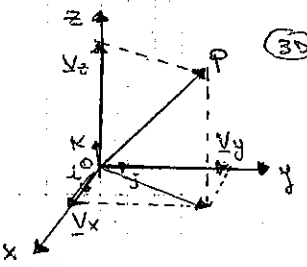
$$\Rightarrow \underline{V} = \underline{V}_x + \underline{V}_y$$

proiezioni ortogonali

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \underline{V} \cdot \underline{i} \\ V_y &= \underline{V} \cdot \underline{j} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{V} = V_x \underline{i} + V_y \underline{j}$$

(prodotto scalare)

componenti cartesiane del vettore



(3D)

$$\Rightarrow \underline{V} = \underline{V}_x + \underline{V}_y + \underline{V}_z$$

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \underline{V} \cdot \underline{i} \\ V_y &= \underline{V} \cdot \underline{j} \\ V_z &= \underline{V} \cdot \underline{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{V} = V_x \underline{i} + V_y \underline{j} + V_z \underline{k}$$

Notazione

$$\underline{V} = [\underline{V}] = (V_x, V_y, V_z) = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}$$

le informazioni per descrivere un vettore possono essere ottenute dalle tre componenti cartesiane.

- <u>modulo</u>: $\| \underline{V} \| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\underline{V} \cdot \underline{V}}$
- <u>direzione</u> e <u>verso</u>: concordi al segmento orientato che unisce l'origine al punto di coordinate (V_x, V_y, V_z)

<u>oss</u>: un vettore è quindi definito quando sono note le sue tre componenti scalari.

OPERAZIONI con le COMPONENTI

• SOMMA e DIFFERENZA VETTORIALE

$$\underline{S} = \underline{u} + \underline{V} \longrightarrow [\underline{S}] = [\underline{u}] + [\underline{V}]$$

$$\begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}$$

$$\underline{d} = \underline{u} - \underline{V} \longrightarrow [\underline{d}] = [\underline{u}] - [\underline{V}]$$

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

- **PRODOTTO con uno SCALARE**

$$\underline{S} = C \cdot \underline{u} \Rightarrow (S_x, S_y, S_z) = (C u_x, C u_y, C u_z)$$

- **PRODOTTO SCALARE**

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = [\underline{u}]^T [\underline{v}] \Rightarrow (u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z) \in \mathbb{R}$$

ovvero somma dei prodotti delle componenti omonime, poiché:

$i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0$ e $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$

- **PRODOTTO VETTORIALE**

è dato dal determinante della matrice che ha come prima riga i versori, come seconda le componenti del primo vettore e come terza le componenti del secondo vettore:

$$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \Rightarrow (u_y v_z - u_z v_y)\underline{i} + (u_z v_x - u_x v_z)\underline{j} + (u_x v_y - u_y v_x)\underline{k}$$

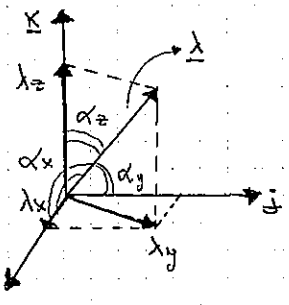
- **PRODOTTO MISTO**

è dato dal determinante della matrice che ha come righe le componenti dei tre vettori:

$$\underline{u} \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \dots\dots \in \mathbb{R}$$

- **COSENI DIRETTORI**

si consideri un versore λ e siano $(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$ le sue componenti cartesiane.



$$\|\lambda\| = 1$$

$$\lambda_x = \underline{\lambda} \cdot \underline{i} = 1 \cdot 1 \cdot \cos\alpha_x$$
$$\lambda_y = \underline{\lambda} \cdot \underline{j} = \cos\alpha_y$$
$$\lambda_z = \underline{\lambda} \cdot \underline{k} = \cos\alpha_z$$

→ coseni direttori del versore $\underline{\lambda}$

$$\|\lambda\| = \sqrt{\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2} = 1$$

$$= \sqrt{\cos\alpha_x^2 + \cos\alpha_y^2 + \cos\alpha_z^2} = 1$$

$$\text{vers}(\underline{v}) = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \frac{1}{|\underline{v}|} \cdot \underline{v} \Rightarrow \text{vers}(\underline{v}) = \left(\frac{v_x}{|\underline{v}|}; \frac{v_y}{|\underline{v}|}; \frac{v_z}{|\underline{v}|} \right)$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745